作业二

练习6.4

1.

（1）

根据函数的相关图像，面积为

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x - e^{-x}\,\mathsf{d}x &= \left(e^x + e^{-x}\right)\Big|_0^1 \\ &= e + e^{-1} - 2.\end{aligned}$$

（3）根据函数的相关图像，面积为

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x - x\,\mathsf{d}x + \int_1^2 2x - x^2\,\mathsf{d}x &= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} + \left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{7}{6}.\end{aligned}$$

4.

（1）

根据函数的相关图像，

$$\begin{aligned}s_1 &= \int_0^a ax - x^2\,\mathsf{d}x \\ &= \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a \\ &= \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \\ &= \frac{a^3}{6}.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s_2 &= \int_a^1 x^2 - ax \, \mathsf{d}x \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right) \Bigg|_a^1 \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2} \right) - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{a}{2} + \frac{a^3}{6}.
\end{aligned}
$$

故

$$
s_1 + s_2 = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}.
$$

考虑函数 $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}$ 的图像。容易看出 $f(x) = 0$ 的三个根分别为 $x = 0$ ，$x = \sqrt{3/2}$ 和 $x = -\sqrt{3/2}$ 。在$(0, 1)$ 之间，解 $f'(x) = 0$ ，可得 $x = \sqrt{1/2}$ 。因此 $x = \sqrt{1/2}$ 是 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 之间的唯一临界点。结合其他信息（比如 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ 等），我们可以大致画出该函数 $f(x)$ 的图像。据此图像，在 $(0, 1)$ 上，当 $x = \sqrt{1/2}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值。

因此，当 $a = \sqrt{1/2}$ 时， $s_1 + s_2$ 取得最小值。此时

$$
s_1 + s_2 = \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1/2}}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2 - \sqrt{2}}{6}.
$$

（2）

根据此时的图像，旋转后的体积为

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x \right)^2 - \pi (x^2)^2 \, \mathsf{d}x + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \pi (x^2)^2 - \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x \right)^2 \, \mathsf{d}x \\
&= \pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 x^2 - x^4 \, \mathsf{d}x + \pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 x^2 \, \mathsf{d}x \\
&= \pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{2} - x^4 \, \mathsf{d}x + \pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x^4 - \frac{x^2}{2} \, \mathsf{d}x \\
&= \pi \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \\
&= \frac{7\sqrt{2} - 2}{60}.
\end{aligned}
$$

5.

(2)

根据该图形的位置，可以计算所得旋转体体积为

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \pi R_x^2 - \pi r_x^2 \, \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \pi(2+\sqrt{1-x^2})^2 - \pi(2-\sqrt{1-x^2})^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} 8\pi\sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= 8\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= 8\pi \cdot \pi/2 \\
&= 4\pi^2.
\end{aligned}
$$

(4)

根据该图形的位置和对称性，可以计算所得旋转体体积为

$$
\begin{aligned}
2\int_0^2 \pi(R_x^2 - r_x^2) \, \mathrm{d}x &= 2\int_0^2 \pi \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 \, \mathrm{d}x - 2\int_0^2 \pi \left(-\frac{x^2}{4}+1\right)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_0^2 4 - x^2 \, \mathrm{d}x - 2\pi \int_0^2 \frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2} + 1 \, \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 - 2\pi \left(\frac{x^5}{80} - \frac{x^3}{6} + x\right)\Big|_0^2 \\
&= 2\pi \left(8 - \frac{8}{3}\right) - 2\pi \left(\frac{2^5}{80} - \frac{2^3}{6} + 2\right) \\
&= \frac{32\pi}{3} - \frac{32\pi}{15} \\
&= \frac{128\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

练习6.5

1.

(1)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+4x+5}\,\mathsf{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2+4}\,\mathsf{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1/2)^2+1}\,\mathsf{d}x \\
&\overset{u=x+1/2}{=} \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}\,\mathsf{d}u \\
&= \frac{1}{4}\,\mathsf{arctan}\,u\Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,\mathsf{d}x &\overset{u=\sqrt{x}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathsf{d}u^2 \\
&= 2\int_0^{+\infty} ue^{-u}\,\mathsf{d}u \\
&= -2\int_0^{+\infty} u\,\mathsf{d}e^{-u} \\
&= -2\left(ue^{-u}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathsf{d}u\right) \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathsf{d}u \\
&= 2(-e^{-u})\Big|_0^{+\infty} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\int e^{-2x} \sin x \, \mathrm{d}x &= -\int e^{-2x} \, \mathrm{d} \cos x \\
&= -\left[\cos x \cdot e^{-2x} - \int \cos x \, \mathrm{d} e^{-2x}\right] \\
&= -\left[\cos x \cdot e^{-2x} + 2 \int \cos x e^{-2x} \, \mathrm{d}x\right] \\
&= -\cos x \cdot e^{-2x} - 2 \int e^{-2x} \, \mathrm{d} \sin x \\
&= -\cos x \cdot e^{-2x} - 2 \left[e^{-2x} \sin x - \int \sin x \, \mathrm{d} e^{-2x}\right] \\
&= -\cos x \cdot e^{-2x} - 2 e^{-2x} \sin x - 4 \int \sin x e^{-2x} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

因此

$$
\int e^{-2x} \sin x \, \mathrm{d}x = -\frac{\cos x \cdot e^{-2x} + 2e^{-2x} \sin x}{5}.
$$

根据微积分基本定理，

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-2x} \sin x \, \mathrm{d}x &= \left(-\frac{\cos x \cdot e^{-2x} + 2e^{-2x} \sin x}{5}\right) \Bigg|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \ln x \, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[x \ln x - \int_\epsilon^1 x \, \mathrm{d} \ln x\right] \\
&= -\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 1 \, \mathrm{d}x \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

(6)

我们先求不定积分。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2-x)(x-1)}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{3}{2})^2}} \\
&= \int \frac{2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} \\
&\overset{u=2x-3}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= \arcsin u + C \\
&= \arcsin(2x-3) + C.
\end{aligned}
$$

根据微积分基本定理，

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2-x)(x-1)}} &= \arcsin(2x-3)\Big|_1^2 \\
&= \arcsin 1 - \arcsin(-1) \\
&= \pi.
\end{aligned}
$$

2.

(2)

首先，$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性与 $\int_{100}^{+\infty} \frac{1}{x}\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性是一样的。

然后，当 $x > 100$ 的时候，显然有 $\ln(1+x^2) > 1$ ，故而有 $\frac{1}{x}\ln(1+x^2) > \ln(1+x^2)$ 。由于 $\int_{100}^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty$ ，根据比较判别法， $\int_{100}^{+\infty} \frac{1}{x}\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \infty$ 。换言之，$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ 是发散的。

(4)

当 $x > 1$ 时，$\arctan x > \pi/4$ 。因此对于任意 $x > 1$ ，均有 $\frac{2x}{\sqrt{1+x}}\arctan x \geq \frac{2x}{\sqrt{1+x}}\frac{\pi}{4}$ 。注意到 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x/\sqrt{1+x}}{2x/\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} = 1$ ，因此 $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 具有同样的敛散性。由于 $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 是发散的，故 $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ 也是发散的。

注意到前面得到的 $\frac{2x}{\sqrt{1+x}}\arctan x \geq \frac{2x}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{\pi}{4}$ ，根据比较判别法， $\int_1^{+\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x}}\arctan x\,\mathrm{d}x$ 是发散的。

(6)

对于该不定积分 $\int_{-1}^{2}\frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$ ，$x=2$ 是其唯一的瑕点。注意到

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2-4}}{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{x+2}=1\neq 0.$$

根据比值判别法，$\int_{-1}^{2}\frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-1}^{2}\frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性。

由于 $\int\frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x=\ln|x-2|$ ，根据微积分基本定理，易得 $\int_{-1}^{2}\frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x=\infty$ 。故而 $\int_{-1}^{2}\frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$ 也是发散的。

注：如果注意到 $\int\frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}(x^2-4)=\ln|x^2-4|+C$ ，也可以直接用微积分基本定理来得到 $\int_{-1}^{2}\frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$ 的发散性。上述比值判别法的优点在于，即使对于不容易得到不定积分的情形，也可以考虑使用比值判别法。比如，用几乎完全同样的方法， 不难证明 $\int_{-1}^{2}\frac{2x\sin(x^2-1)\cdot e^{x^2+1}}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$ 也是发散的。

3.

(1)

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\,\mathrm{d}x\\
&\overset{u=2x}{=}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\
&=\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{+\infty} \sin^2 x\,\mathrm{d}\frac{1}{x} \\
&= -\left(\frac{1}{x}\cdot\sin^2 x\bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\sin^2 x\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin^2 x}{x} + \int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= 0 - 0 + 2\cdot\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

6.

由于 $\Gamma(1+\alpha)=\alpha\Gamma(\alpha)$ ，我们不难得到

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+n-2\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

由于（参见书中例9） $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ ，我们有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+n-2\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}.$$

基于此，我们有 $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 且 $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$ 。

由于 $\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1$ ，因此

$$\frac{\Gamma(2)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}=\frac{1\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\frac{15\sqrt{\pi}}{8}}=\frac{4}{15}.$$